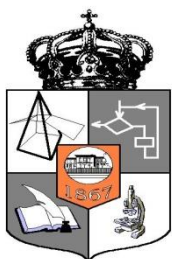


CONCURSUL NAȚIONAL INTERDISCIPLINAR „SOLOMON MARCUS”

18 mai 2019



Ministerul Educației Naționale
Inspectoratul Școlar Județean Bacău
COLEGIUL NAȚIONAL „FERDINAND I”
SECȚIUNEA ION BARBU
MATEMATICĂ
Clasa a X-a
Barem de corectare și notare

SUBIECTUL I (20 p)

În fiecare săptămână sunt selectate 20 din cele mai îndrăgite cântece. Știm că:

- 1) Aceleași 20 de cântece nu sunt selectate în aceeași ordine în oricare două săptămâni consecutive;
- 2) Dacă un cântec coboară în top, în celelalte săptămâni nu își mai poate îmbunătăți poziția.

Determinați numărul maxim de săptămâni consecutive în care aceleași 20 de cântece pot fi selectate în top.

Numerotăm cântecele selectate în prima săptămână după ordinea lor în top cu 1, 2, 3, ..., 20.

Numărul maxim de săptămâni în care aceleași cântece sunt în top va fi dat de numărul schimbărilor pozițiilor în top a două cântece vecine. 4p

Astfel primul cântec poate ajunge pe ultima poziție după 19 săptămâni, în fiecare coborând numai câte o poziție în top..... 4p

Al doilea cântec urcă pe prima poziție (atunci 1 coboară) și apoi coboară până pe poziția

19 (după încă 18 săptămâni)4p

Obținem astfel suma: $19+18+\dots+1 = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ 8p

CONCURSUL NAȚIONAL INTERDISCIPLINAR „SOLOMON MARCUS”

18 mai 2019

SUBIECTUL II (25 p)

a) Fie $a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, $a \neq b$. Să se arate că ecuația $\log_a(\log_b x) = \log_b(\log_a x)$ are cel mult o soluție.

a) Să se demonstreze inegalitatea $\sin \frac{\pi}{m \cdot n} \geq \frac{1}{m} \sin \frac{\pi}{n}$, unde m și n sunt numere naturale nenule.

a) Trebuie ca x , $\log_a x$, $\log_b x$ să fie pozitive.

Dacă $a > 1$, atunci trebuie ca $x > 1$ deci $b > 1$, iar dacă $a < 1$ atunci $x < 1$ și $b < 1$.

Deci ecuația poate avea soluții numai dacă $a, b \in (0, 1)$ sau $a, b \in (1, \infty)$ 3p

Notând $y = \log_a(\log_b x) = \log_b(\log_a x)$ avem $x = a^{b^y} = b^{a^y}$ deci $b^y \cdot \lg a = a^y \cdot \lg b$ 4p

de unde $\left(\frac{b}{a}\right)^y = \log_a b$ sau $y = \log_{\left(\frac{b}{a}\right)}(\log_a b)$ și x (dacă există) este unic. 3p

b) Pentru $m=1$ avem egalitate 1p

iar pentru $n=1$ inegalitatea este evidentă. 1p

Fie $m, n \geq 2$ și fie, în această ordine, punctele $AA_1A_2 \dots A_{m-1}B$ pe cercul trigonometric

astfel încât $\angle AOA_1 = \angle A_1OA_2 = \dots = \angle A_{m-1}OB = \frac{\pi}{m \cdot n}$ 3p

Cum $\text{aria} [\Delta AOB] < \text{aria} [\Delta AOA_1] + \dots + \text{aria} [\Delta A_{m-1}OB] = m \cdot \text{aria} [\Delta AOA_1]$, 5p

rezultă $\sin \frac{\pi}{n} < m \cdot \sin \frac{\pi}{m \cdot n}$, ceea ce trebuia demonstrat. 5p